Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalități de lucru diferențiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

8

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : clasa 8 : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 –
2 vol.
ISBN 978-973-47-4302-5
Partea 2. – Ed. rev. – 2025. – ISBN 978-973-47-4376-6
51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea şi scăderea fracțiilor algebrice

Citesc și rețin

Adunarea și **scăderea** fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0$.

2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0$, $D(x) \neq 0$, se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ și $\dfrac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observație: Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.

Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{x+2}{2x}$.

Soluție:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x} = \dfrac{x-1+3x-5}{4x} = \dfrac{4x-6}{4x} = \dfrac{2(2x-3)}{4x} = \dfrac{2x-3}{2x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - {}^{3x)}\dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x(x+2)}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x^2+6x}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$

$= \dfrac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \dfrac{1-6x}{6x^2}$.

2. Calculați: $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\dfrac{6x-1}{6x-9}$.

Soluție:

$$\frac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\frac{6x-1}{6x-9}=\,^{3)}\frac{4x^2-1}{2x(2x-3)}-\,^{2x)}\frac{6x-1}{3(2x-3)}=\frac{3(4x^2-1)-2x(6x-1)}{6x(2x-3)}=$$

$$=\frac{12x^2-3-12x^2+2x}{6x(2x-3)}=\frac{\cancel{2x-3}}{6x\cancel{(2x-3)}}=\frac{1}{6x}.$$

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $E(x)=\dfrac{7x+3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x-x^2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$.

Soluție:

$$E(x)=\,^{x)}\frac{7x+3}{(x-1)(x+1)}-\,^{x-1)}\frac{x-1}{x(x+1)}+\,^{x+1)}\frac{1}{x(x-1)}=\frac{x(7x+3)-(x-1)^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{7x^2+3x-x^2+2x-1+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{6x^2+6x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{6\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{6}{x-1}.$$

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Calculați:

a) $\dfrac{4x-1}{5x^4}+\dfrac{7-6x}{5x^4}$; b) $\dfrac{6x-5}{7x^2}+\dfrac{8-3x}{7x^2}$; c) $\dfrac{7x-2}{2x^3}-\dfrac{3x-1}{2x^3}$; d) $\dfrac{6x-5}{4x^2}-\dfrac{8-2x}{4x^2}$.

b) $\dfrac{6x-5}{7x^2}+\dfrac{8-3x}{7x^2}=$

2. Calculați:

a) $\dfrac{7x^2-3x}{x-1}+\dfrac{x^2-5x}{x-1}$; b) $\dfrac{2x^2+x}{x+2}+\dfrac{x^2+5x}{x+2}$;

c) $\dfrac{3x^2+x}{x-3}-\dfrac{x^2+7x}{x-3}$; d) $\dfrac{5x^2-x}{x+1}-\dfrac{x^2-5x}{x+1}$.

d) $\dfrac{5x^2-x}{x+1}-\dfrac{x^2-5x}{x+1}=$

3. Calculați:

a) $\dfrac{3x-1}{2x}+\dfrac{4x+3}{4x}$; b) $\dfrac{1-6x}{3x}+\dfrac{2x+1}{9x}$; c) $\dfrac{4x-7}{3x^2}+\dfrac{1-6x}{4x^2}$; d) $\dfrac{7x+8}{5x^2}+\dfrac{1-4x}{3x^2}$.

d) $\dfrac{7x+8}{5x^2}+\dfrac{1-4x}{3x^2}=$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Calculați:

a) $\dfrac{4x-3}{4x}-\dfrac{1-6x}{8x}$; b) $\dfrac{1-7x}{9x}-\dfrac{2-4x}{3x}$; c) $\dfrac{5x+1}{6x^2}-\dfrac{4x-5}{9x^2}$; d) $\dfrac{3+4x}{8x^2}-\dfrac{3x-2}{6x^2}$.

5. Calculați:

a) $\dfrac{6x-5}{3x}+\dfrac{1-2x^2}{x^2}$; b) $\dfrac{x^4+1}{2x^4}+\dfrac{3-2x}{4x}$; c) $\dfrac{2x^3-5}{2x^5}+\dfrac{1-3x}{3x^3}$.

6. Calculați:

a) $\dfrac{4x-4}{3x}-\dfrac{8x^3-5}{6x^3}$; b) $\dfrac{4x+1}{2x^2}-\dfrac{10x^2+7}{5x^3}$; c) $\dfrac{2x+7}{4x^2}-\dfrac{3x^4-5}{6x^5}$.

7. Calculați:

a) $\frac{x+3}{2x}-\frac{x-5}{2x-6}$; b) $\frac{4-x}{3x+3}+\frac{x-1}{3x}$; c) $\frac{x+2}{4x}-\frac{x-1}{4x-8}$.

8. Calculați:

a) $\frac{6x^2+1}{4x^2}-\frac{6x+3}{4x+2}$; b) $\frac{4x-1}{8x^2}-\frac{3x-1}{6x^2+2x}$; c) $\frac{3x-7}{9x^2-3x}-\frac{2x-5}{6x^2}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

9. Calculați:

a) $\frac{5x^2-2x^3}{x^5}-\frac{4x-x^2}{x^4}+\frac{x+4}{x^3}$; b) $\frac{2-x}{x^2}+\frac{x^2-5x}{x^3}-\frac{7x-3x^2}{x^4}$.

10. Calculați:

a) $\frac{4-3x^2}{x^2-2x}+\frac{9x-1}{3x-6}$; b) $\frac{4x+1}{4x-4}+\frac{2-3x^2}{3x^2-3x}$; c) $\frac{6x-5}{4x+2}+\frac{7-3x^3}{2x^3+x^2}$.

11. Calculați:

a) $\frac{x^2+2}{6x^2-4x}-\frac{x-5}{9x-6}+\frac{x-1}{3x}$; b) $\frac{x-4}{6x-3}-\frac{x-2}{6x}+\frac{x^2+2x}{8x^2-4x}$.

12. Calculați:

a) $\frac{x}{x^2-6x+9}-\frac{x+3}{x^2-3x}$; b) $\frac{2-x}{x^2+2x}+\frac{x}{x^2+4x+4}$;

c) $\frac{3x-1}{3x^2+x}-\frac{9x}{9x^2+6x+1}$; d) $\frac{1-2x}{2x^2+x}+\frac{4x}{4x^2+4x+1}$.

13. Calculați:

a) $\frac{3x}{x+2}+\frac{6x+4}{x^2-4}-\frac{2x}{x-2}$; b) $\frac{9-15x}{x^2-9}+\frac{4x}{x-3}-\frac{3x}{x+3}$;

c) $\frac{4x}{x-5}-\frac{4x^2+10x}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}$; d) $\frac{3x}{2x+1}+\frac{x-2}{1-2x}-\frac{4x+1}{4x^2-1}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Calculați:

a) $\frac{4x+8}{x^2-9}-\frac{x+1}{x^2+3x}-\frac{3x}{x^2-3x}$; b) $\frac{1-x}{x^2+2x}+\frac{x-3}{2x-x^2}+\frac{2x}{x^2-4}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x)=\frac{x+1}{4x^2-1}-\frac{x^2+2}{2x^3+x^2}+\frac{x+5}{x^2-2x^3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$;

b) $E(x)=\frac{x^3+4}{3x^4-2x^3}+\frac{6x-1}{4-9x^2}+\frac{x^3-1}{3x^4+2x^3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right\}$.

16. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x)=\frac{13x}{x^2-6x+9}-\frac{x-1}{x^2-9}+\frac{2x}{x+3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$;

b) $E(x)=\frac{15x}{x^2+4x+4}+\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{4x}{x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

17. Fie expresia $E(x)=\frac{x+2}{8x^2+32}-\frac{x}{16x-32}-\frac{x+2}{16-x^4}+\frac{x^2}{8x^2-32}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

a) Arătați că forma cea mai simplă a expresiei este $E(x)=\frac{x^2+4}{16x^2-64}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $E(x)^{-1}\geq 0$.

18. Se consideră expresia $E(x)=\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{(x+1)^2}}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

a) Arătați că forma cea mai simplă a expresiei este $E(x)=\frac{1}{|x^2-1|}$.

b) Rotunjiți la a patra zecimală numărul $n=E(2)+E(3)+E(4)+\ldots+E(11)$.

19. Se consideră expresia $E(x)=\frac{x^3-4x^2+4x}{(x-1)^3-(x-1)}-\frac{x^2-3}{x^2-1}+\frac{x^3+4x^2+4x}{(x+1)^3-(x+1)}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Arătați că $E(x)$ nu depinde de x, pentru orice x din domeniul de definiție.

20. Determinați numărul natural $\overline{xy}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq y$, știind că cifrele x și y îndeplinesc condiția $\frac{2}{x}+\frac{x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{y}{x-y}-\frac{2}{y}=0$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculați:

a) $\frac{5x^2-x}{x-4}-\frac{4x^2+3x}{x-4}$; b) $\frac{2x+1}{6x}+\frac{4-x}{3x-9}$.

(3p) **2.** Calculați: $\frac{x+1}{2x^2-x}-\frac{2x+3}{4x^2-1}+\frac{1}{x}$.

(3p) **3.** Se consideră expresia $E(x)=\frac{x+3}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x-3}{x^2-2x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Citesc și rețin

Definiție: O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (1) se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**. Numerele a, b și c se numesc **coeficienții ecuației**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1) dacă $au^2 + bu + c = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au^2 + bu + c = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație: Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Această egalitate reprezintă descompunerea în factori a sumei algebrice $ax^2 + bx + c$.

Rezolvarea ecuației (1):
A. Cazurile particulare

1. $c = 0$; $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ sau $ax + b = 0$, deci $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}$.

2. $b = 0$; $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{c}{a} = 0$.

Dacă $\dfrac{c}{a} > 0$, atunci $S = \varnothing$.

Dacă $\dfrac{c}{a} < 0$, atunci $x^2 + \dfrac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|} = 0$ sau $x + \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|} = 0$, deci $S = \left\{-\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right\}$.

B. Cazul general
Definiție: Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numește **discriminantul ecuației** (1).

Pentru rezolvarea ecuației (1) în cazul general $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, procedăm astfel:

1. calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. ▪ dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{R}$, deci $S = \varnothing$;

   ▪ dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (1) are două soluții egale în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

   ▪ dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (1) are două soluții distincte în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$

Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3x^2 + 5x = 0$; b) $4x^2 - 100 = 0$.

Soluție:

a) $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, deci $x = 0$ sau $3x + 5 = 0$; $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$, prin urmare $S = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;

b) $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0$, deci $x - 5 = 0$ sau $x + 5 = 0$; $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ și $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; prin urmare, $x \in \{-5, 5\}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$; b) $(x-1)^2 = -x(x+5)$.

Soluție:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$, deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, prin urmare $\Delta = 0$.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$, deci $S = \{-3\}$;

b) $(x-1)^2 = -x(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$, deci $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, prin urmare $\Delta > 0$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ deci } S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

3. Un dreptunghi cu aria de 36 cm^2 are lățimea cu 5 cm mai mică decât lungimea. Calculați perimetrul dreptunghiului.

Soluție:

$L \cdot l = 36 \Leftrightarrow L(L-5) = 36 \Leftrightarrow L^2 - 5L - 36 = 0$, deci $a = 1$, $b = -5$, $c = -36$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$, prin urmare $\Delta > 0$.

$$L_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5-13}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ cm.}$$

$$L_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm, prin urmare } L = 9 \text{ cm, } l = 4 \text{ cm}$$

și perimetrul este egal cu $2(L + l) = 2(9 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) = 26$ cm.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 2x = 0$; b) $x^2 + 5x = 0$; c) $x^2 + 9x = 0$;
d) $2x^2 - 18x = 0$; e) $2x^2 + 14x = 0$; f) $5x^2 - 10x = 0$;
g) $18x^2 = 24x$; h) $12x^2 = -8x$; i) $15x^2 = 20x$.

h) $12x^2 = -8x$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 4 = 0$; c) $x^2 - 9 = 0$;
d) $4x^2 - 9 = 0$; e) $9x^2 - 4 = 0$; f) $16x^2 - 1 = 0$;
g) $25x^2 = 36$; h) $49x^2 = 64$; i) $81x^2 = 16$.

i) $81x^2 = 16$

3. Completați următorul tabel:

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$	**Coeficienții** a	b	c
$4x^2 - 5x + 2 = 0$			
$-x^2 + 8x - 3 = 0$			
$-6x^2 + x + 2 = 0$			

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se calculează cu formula:

A. $\Delta = a^2 - 4bc$; B. $\Delta = b^2 + 4ac$; C. $\Delta = b^2 - 4ac$.

5. Calculați discriminantul și apoi precizați numărul de soluții reale pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$; b) $3x^2 + 5x + 4 = 0$; c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Rezolvați următoarele ecuații, unde $a \in \mathbb{R}$:

a) $a^2 - 2a + 1 = 0$; b) $a^2 + 4a + 4 = 0$; c) $a^2 - 6a + 9 = 0$;
d) $4a^2 + 1 = 4a$; e) $9a^2 + 6a = -1$; f) $a^2 + 16 = 8a$;
g) $10a - 1 = 25a^2$; h) $36a^2 = 12a - 1$; i) $4 + 28a = -49a^2$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 - 2x - 3 = 0$; c) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
d) $x^2 - 7x + 12 = 0$; e) $x^2 - 9x + 20 = 0$; f) $x^2 + 2x - 35 = 0$;
g) $x^2 + 11 = 4x$; h) $x^2 - 3x = 88$; i) $x^2 + 24 = 10x$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; c) $4x^2 - 11x - 3 = 0$;
d) $6x^2 + 17x = 14$; e) $2x^2 + 15 = 13x$; f) $3x^2 + 10 = 11x$;
g) $8x^2 + 2x = 3$; h) $5x^2 - 2 = 9x$; i) $3x^2 - 10 = x$.

9. Produsul a două numere naturale consecutive este egal cu 156. Determinați cele două numere.

10. Produsul a două numere întregi consecutive este egal cu 240. Determinați cele două numere.

11. Produsul a două numere întregi consecutive de aceeași paritate este egal cu 143. Determinați cele două numere.

12. Aplicând formula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $x^2 + x - 2$; b) $x^2 + x - 6$; c) $x^2 - x - 12$;
d) $x^2 - 6x + 8$; e) $x^2 + 4x + 3$; f) $x^2 - 4x - 5$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $2x^2 + 5x - 3$; b) $3x^2 - 5x - 2$; c) $4x^2 - x - 3$;
d) $5x^2 + 3x - 2$; e) $2x^2 - 3x - 9$; f) $2x^2 + 7x + 6$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $2x(x + 1) - x(x + 4) - 5 = -2$; b) $3x(x - 4) + 2x(3 - x) + 5 = 0$;
c) $x(5x + 2) - 3x(x - 1) - 3 = 0$; d) $x(5x - 1) - 2x(x + 2) - 2 = 0$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(4x + 1)^2 - 2x(4x + 3) - 4 = 0$; b) $(x - 4)^2 + (x - 1)(x + 1) = 5x$;
c) $(4x - 1)^2 + (x + 7)^2 - 15x^2 = 58$; d) $(x - 4)^2 + 3(x + 9) = (2x - 5)^2$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{6-x}{x}+3=\frac{x+5}{2}$; b) $\frac{x+3}{x}-1=\frac{x-1}{2}$; c) $\frac{x+1}{4}+1=\frac{x+3}{x}$.

17. Descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $x(7x - 5) - 2x(x + 2) - 2$; b) $x(3x + 7) - 5x(1 - x) - 3$.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{6})x-2\sqrt{3}=0$; b) $x^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{7})x+\sqrt{21}=0$;
c) $2x^2 + (1-2\sqrt{5})x-\sqrt{5}=0$; d) $4x^2 - (2+2\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{2x-1}{3}+\frac{x+1}{2x+6}=\frac{x}{3x+9}$; b) $\frac{2-21x}{15x-30}=\frac{x}{5}-\frac{8}{3x-6}$; c) $\frac{25x-13}{20x-20}-\frac{3}{5x-5}=\frac{x}{4}$.

20. Un romb cu aria de 72 cm^2 are o diagonală cu 7 cm mai mică decât cealaltă diagonală. Calculați lungimile diagonalelor rombului.

21. Un dreptunghi cu aria de 80 cm^2 are lungimea cu 1 cm mai mare decât triplul lățimii. Calculați perimetrul dreptunghiului.

22. Aflați două numere reale pozitive, știind că au media aritmetică egală cu 9 și media geometrică egală cu 4.

23. Calculați perimetrul triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, știind că lungimile laturilor sale se exprimă prin trei numere naturale consecutive.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

24. Calculați lungimea muchiei bazei prismei patrulatere regulate care are $\mathcal{A}_t = 16$ cm^2 și $h = 1$ cm.

25. Calculați lungimea muchiei bazei piramidei patrulatere regulate care are $\mathcal{A}_t = 40\ \text{cm}^2$ și $a_p = 3$ cm.

26. Un con circular drept are $G = 7$ dm și $\mathcal{A}_t = 44\pi\ \text{dm}^2$. Calculați raza bazei conului circular drept.

27. Determinați numărul natural n pentru care are loc egalitatea:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 7n - 15$; b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n - 2)^2$.

28. Arătați că, pentru orice numere reale m și n, următoarele ecuații au soluții în $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - (2m + n)x + 2mn = 0$; b) $x^2 + (m - 3n)x - 3mn = 0$.

29. Notăm cu S suma numerelor naturale mai mari decât n^2 și mai mici decât $(n + 1)^2$. Determinați numărul natural n, știind că $S = 25n$.

30. Se consideră suma $S = -a^2 + 2a + 10$, $a \in \mathbb{Z}$. Determinați numărul întreg a pentru care suma S este număr prim.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

31. Punctele $A(4a + 1, a + 7)$, $B(a, a + 5)$ și $C(1 - 4a, a - 1)$, $a \in \mathbb{Z}$, sunt reprezentate în sistemul de axe ortogonale xOy. Știind că $AB = \frac{BC}{3}$, determinați numărul întreg a.

32. Pentru numerele naturale mai mici sau egale cu $\overline{ab}$, $a \neq 0$, notăm cu Su și Sz suma cifrelor de ordinul unităților, respectiv suma cifrelor de ordinul zecilor. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care $Su = 3Sz$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$; b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

(3p) **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(2x - 3)^2 + 2(x^2 - 5) + 11x = 0$.

(3p) **3.** În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea AD, $D \in BC$. Știind că $AD = 4\sqrt{5}$ cm, iar lungimile segmentelor BD și CD sunt două numere naturale consecutive de aceeași paritate, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$.

Capitolul III
FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite

Citesc și rețin

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numește **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

Notăm $f : A \to B$ și citim „funcția f este definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B”.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea B se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul) f se numește **legea de corespondență** a funcției.

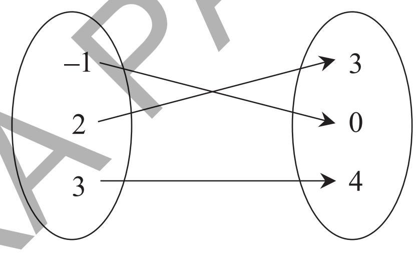
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea lui x prin funcția f** sau **valoarea funcției f în punctul x**.

Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	–1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f : \{-1, 2, 3\} \to \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției f** sau **mulțimea valorilor funcției f**. $\operatorname{Im} f \subseteq B$.

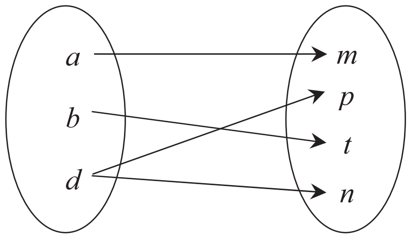
Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcția f se numește **funcție numerică**.

Definiție: Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ și citim „funcțiile f și g sunt egale”.

Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul d din domeniul de definiție are două imagini, p și n.

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2\} \to \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinați mulțimea Im f.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare Im $f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcția $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \to A$, $g(x) = \dfrac{x}{2} + 5$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $g(-4)$ și $g(4)$.

b) Calculați media geometrică a numerelor $g(-6)$ și $g(6)$.

Soluție:

a) $g(-4) = -\dfrac{4}{2} + 5 = 3$ și $g(4) = \dfrac{4}{2} + 5 = 7$; $m_a = \dfrac{g(-4) + g(4)}{2} = \dfrac{3+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$;

b) $g(-6) = -\dfrac{6}{2} + 5 = 2$ și $g(6) = \dfrac{6}{2} + 5 = 8$; $m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a) $f : E \to F$, $f(x) = 10x$;

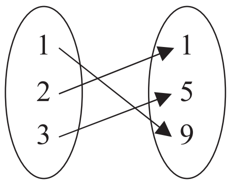
b) $g : \{-1, 1, 2\} \to \{1, 4\}$, $g(x) = x^2$;

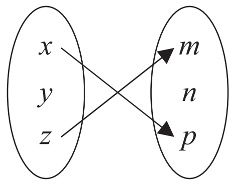
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

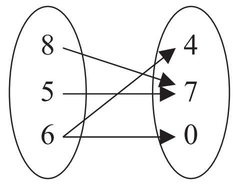
2. Se consideră funcția $f : A \to B$, $f(x) = 5x$. Numiți:

a) domeniul de definiție; b) domeniul de valori; c) legea de corespondență.

3. Verificați dacă următoarele diagrame reprezintă funcții, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.

a)


b)


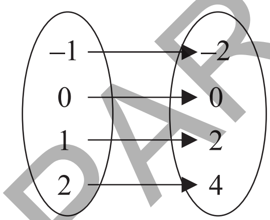
c)


4. Se consideră funcția $f : A \to B$, definită prin tabelul următor:

x	1	2	3	5
$f(x)$	2	3	4	6

Completați spațiul punctat cu:
a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; ....
b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; ....
c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

5. Se consideră funcția $f : E \to F$, definită prin diagrama următoare:



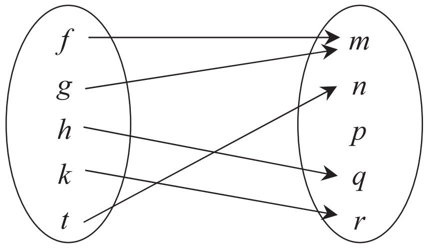
Completați spațiul punctat cu:
a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; ....
b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; ....
c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

6. Se consideră funcția $f : A \to B$, definită prin tabelul următor:

x	–2	1	2	3	7
$f(x)$	–3	0	1	2	6

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției f în punctul:
a) 1; .... b) 7; .... c) –2; .... d) 3; .... e) 2. ....

7. Se consideră funcția $s : E \to F$, definită prin diagrama următoare:



Completați spațiul punctat cu imaginea prin funcția s a elementului:
a) f; .... b) k; .... c) t; .... d) g; .... e) h. ....

8. Se consideră funcția $h : \{13, 17, 24, 33, 91\} \to \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție produsul cifrelor sale. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $h(13) = 3$; ☐ b) $h(24) = 6$; ☐ c) $h(17) = 7$; ☐
d) $h(33) = 3$; ☐ e) $h(91) = 9$; ☐ f) $h(24) = 8$. ☐

Exerciții și probleme de dificultate redusă

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 2$. Calculați:
a) $f(4)$; b) $f(6)$; c) $f(0)$; d) $f(-3)$.

10. Stabiliți care dintre următoarele aplicații reprezintă o funcție:
a) $f : \{-1, 2, 3\} \to \{-3, 6, 9\}, f(x) = 3x$; b) $g : \{-2, 1, 2\} \to \{-1, 1, 4\}, g(x) = x^2$;
c) $h : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 3\}, h(x) = x^3$; d) $s : \{-4, 5\} \to \{-5, 0, 1, 4\}, s(x) = -x$.

11. Se consideră funcția $f : \{-3, -1, 0, 1, 2\} \to A$. Determinați Im f pentru legea de corespondență:
a) $f(x) = 3x + 1$; b) $f(x) = 2x - 3$; c) $f(x) = -7x + 4$.

12. Se consideră funcția $f : \left\{4, 25, 36, \frac{49}{16}, \frac{64}{81}\right\} \to A$, $f(x) = \sqrt{x}$. Determinați Im f.

13. Se consideră funcția $g : \{-2, 0, 4\} \to A$. Determinați Im g în fiecare dintre cazurile:
a) $g(x) = \frac{x}{2} + 7$; b) $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$; c) $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

14. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to A$, $f(x) = 3^x$. Determinați Im f.

15. Se consideră funcția $h : \left\{-\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}\right\} \to E$. Determinați Im h, știind că:
a) $h(x) = \sqrt{2}x + 5$; b) $h(x) = \sqrt{2}x - 4$; c) $h(x) = 1 - \sqrt{2}x$.

16. Arătați că aplicația $f : \{201, 365, 402\} \to \{2, 3, 4, 5, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție divizorul său din domeniul de valori, nu este o funcție.

17. Se consideră funcția $h : \left\{\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\right\} \to A$, $h(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor $h(\sqrt{6})$ și $h(3\sqrt{6})$.

18. a) Se consideră funcțiile $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$ și $g : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $g(x) = |x|$. Arătați că $f = g$.

b) Se consideră funcțiile $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = -x$ și $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x^3$. Arătați că $f \neq g$.

c) Se consideră funcțiile $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x$ și $h : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x^7$. Arătați că $g = h$.

19. Se consideră funcția $f: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Arătați că următoarele formule descriu funcția f:

a) $f(x) = 1 - x^3$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^5 + 1$.

20. Se consideră funcția $f: \{-5, -3, 1, 4\} \to B$. Determinați Im f, știind că:

a) $f(x) = |x + 1|$; b) $f(x) = |x - 1|$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Se consideră funcția $f: \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\} \to C$. Determinați Im f, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

22. Se consideră funcția $r: \{24, 25, 28, 43, 59\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție restul împărțirii lui la 7. Determinați cardinalul mulțimii Im r.

23. Se consideră funcția $g: \{13, 14, 15, 16, 25\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție numărul său de divizori naturali. Câte submulțimi are mulțimea Im g?

24. Se consideră funcția $h: \{34, 45, 56, 64, 86, 92\} \to \{12, 18, 20, 24, 30, 36\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție cel mai mic multiplu comun al cifrelor sale. Determinați Im h.

25. Determinați imaginea funcției $g: \{-5, -4, -2, -1, 0, 3\} \to \{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ în următoarele cazuri:

a) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă } x \geq -1 \\ x + 5, \text{ dacă } x < -1 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} 4 - 3x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ 3x + 11, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Arătați că $f(x)[f(x + 1) + 1] + 1 \geq 0$.

27. a) Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = (-1)^n \cdot n$. Calculați suma $S = g(1) + g(2) + g(3) + ... + g(101)$.

b) Se consideră funcția $h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $h(n) = \frac{n}{n+1}$. Calculați produsul $P = h(1) \cdot h(2) \cdot h(3) \cdot ... \cdot h(100)$.

28. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că $\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x + y}{2}\right)$.

29. Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 1$. Arătați că $n \in \mathbb{N}$, în următoarele cazuri:

a) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(100)}$; b) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(123)}$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

30. Determinați legea de corespondență $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că $f(0) \cdot f(3x - 1) = x + 0,(6)$.

31. Arătați că nu există funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(1 + x) + f(1 - x) = x$.

32. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n(n + 2)$. Determinați numărul întreg n pentru care $\sqrt{f(n) \cdot f(n+1)+1} = 11$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră funcția $h : \{-2, -1, 0, 3\} \to E$, $h(x) = 2^x$. Determinați Im h.

(3p) **2.** Se consideră funcția $f: \{-8, -5, 1, 2, 3\} \to A$, $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $f(-8)$ și $f(2)$.
b) Calculați media geometrică a numerelor $f(-5)$ și $f(1)$.

(3p) **3.** Se consideră funcția $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$. Arătați că suma $S = g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(48)$ este un număr natural pătrat perfect.

Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice

Citesc și rețin

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}$ se numește **graficul funcției** f.

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție numerică. Mulțimea punctelor din plan, $M(x; y)$, pentru care $(x; y) \in G_f$ se numește **reprezentarea geometrică a graficului funcției** f (**reprezentarea grafică a funcției** f **sau graficul funcției** f).

Cum se aplică?

1. Se consideră funcția $h : \{-1, 0, 4\} \to \{-8, -2, 0, 2\}$, $h(x) = -2x$. Determinați mulțimea G_h.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $h(-1) = 2$, $h(0) = 0$, $h(4) = -8$, prin urmare $G_h = \{(-1; 2), (0; 0), (4; -8)\}$.

2. Se consideră funcția $f: \{-2, -1, 0, 2, 4, 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \le 0 \\ x-4, & x > 1 \end{cases}$. Determinați mulțimea G_f.

Soluție:

Deoarece elementele -2, -1 și 0 sunt mai mici sau egale cu 0, rezultă că imaginile lor se calculează cu formula $f(x) = 1 - 2x$, prin urmare $f(-2) = 5$, $f(-1) = 3$ și $f(0) = 1$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Determinați coordonatele punctului în care se intersectează graficele funcțiilor f și g.

(3p) **2.** Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$.

(3p) **3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 8$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy.

b) Calculați distanța dintre punctele O și $M(x; y)$, știind că punctul M este situat pe graficul funcției f și are proprietatea $x = -y$.

Lecția 10. Funcții de forma $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

Citesc și rețin

Definiție: Fie $D \subset \mathbb{R}$ un interval și funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Funcția f se numește **restricția funcției** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ **la intervalul** D.

Mulțimea G_f este o submulțime a mulțimii G_g, prin urmare reprezentarea grafică a funcției f este un segment sau o semidreaptă, după cum intervalul D este mărginit, respectiv nemărginit.

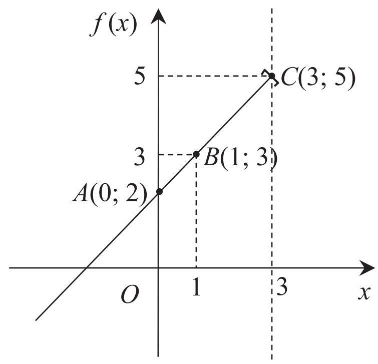
Cum se aplică?

1. Reprezentați grafic funcția $f : (-\infty; 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, în sistemul de axe ortogonale xOy.

Soluție:

Scriem tabelul de valori ale funcției f pentru $x = 0$, $x = 1$ și $x = 3$.

x	0	1	3
$f(x)$	2	3	5

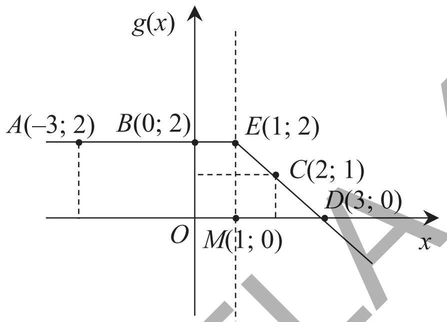


Analizând domeniul de definiție al funcției, rezultă că graficul funcției f este semidreapta închisă cu originea în punctul C și care conține punctele B și A.

2. Reprezentați grafic funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}2, & x\in(-\infty;1)\\ -x+3, & x\in[1;\infty)\end{cases}$, în sistemul de axe ortogonale xOy.

Soluție:

x	–3	0	2	3
$g(x)$	2	2	1	0



Prin punctul $M(1; 0)$ construim o paralelă la axa Oy, cu ajutorul căreia determinăm originea comună $E(1; 2)$ a celor două semidrepte EA (deschisă) și ED (închisă) care formează graficul funcției g.

3. Determinați funcția $h:D\to\mathbb{R}$, $h(x)=ax+b$ care are drept reprezentare geometrică segmentul $(EF]$, unde $E(-2; -7)$ și $F(3; 8)$.

Soluție:

Observăm că $D=(-2; 3]$, prin urmare $h:(-2; 3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=ax+b$. Avem $h(-2)=-7$ și $h(3)=8$ sau $-2a+b=-7$, respectiv $3a+b=8$. Rezolvăm prin metoda substituției sistemul format cu cele două ecuații: $-2a+b=-7$, deci $b=2a-7$ și înlocuind în ecuația $3a+b=8$ obținem $5a-7=8$, de unde rezultă $a=3$ și $b=-1$. Prin urmare, $h:(-2; 3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=3x-1$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x, & x\in(-\infty;-2]\\ -x, & x\in(-2;+\infty)\end{cases}$. Completați tabelul:

x	–4	–3	–2	–1	0	5
$f(x)$						

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(-\infty;0)\\ x-3, & x\in[0;+\infty)\end{cases}$. Completați tabelul:

x	–3	–2	0	1	4	5
$g(x)$						

3. Se consideră funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases}x-2, & x\in(-\infty;-1]\\ 1-x, & x\in(-1;+\infty)\end{cases}$. Completați caseta cu simbolul corespunzător „$\in$” sau „$\notin$”:

a) $(-5; -7)\ \square\ G_h$; b) $(-1; -3)\ \square\ G_h$; c) $(2; -1)\ \square\ G_h$; d) $(4; -5)\ \square\ G_h$.

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Reprezentarea grafică a funcției $f:[1; +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$, în sistemul de axe ortogonale xOy este:

A. o dreaptă; B. o semidreaptă; C. un segment.

5. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Reprezentarea grafică a funcției $g : [-4; 2) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 5$ în sistemul de axe ortogonale xOy este:

A. o dreaptă; B. o semidreaptă; C. un segment.

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$; b) $f : (-1; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -x$;

c) $f : (-\infty; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$; d) $f : [-3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 4x$.

7. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy următoarele funcții:

a) $f : [-2; 1) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$; b) $g : [-2; 4] \to \mathbb{R}, g(x) = 5 - 2x$.

8. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy următoarele funcții:

a) $h : (-\infty; 3] \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{3}x - 4$; b) $s : (-4; +\infty) \to \mathbb{R}, s(x) = -\sqrt{2}x + 2$.

9. Reprezentați grafic funcția h în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $h : (-\infty; 2] \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x}{2}$; b) $h : (-1; +\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x}{3}$.

10. Reprezentați grafic funcția g în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $g : [-2; 2] \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{3}{2}x - 1$; b) $g : (0; 3] \to \mathbb{R}, h(x) = 7 - \dfrac{5}{3}x$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, x \in (-\infty; 2] \\ 2, x \in (2; +\infty) \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -1, x \in (-\infty; -1] \\ -x + 2, x \in (-1; +\infty) \end{cases}$.

12. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, știind că:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 3, x \in (-\infty; 0] \\ 1 - 3x, x \in (0; +\infty) \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, x \in (-\infty; -1) \\ 2x - 9, x \in [-1; +\infty) \end{cases}$.

13. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = -|x|$.

14. Reprezentați grafic funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $h(x) = |2x|$; b) $h(x) = |3x|$.

15. Determinați funcția $g : E \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ care are drept reprezentare grafică semidreapta:

a) $[OA$, unde $O(2; -3)$ și $A(3; -2)$; b) $(OA$, unde $O(-1; 5)$ și $A(-3; 7)$;

c) $(OA$, unde $O(-3; -7)$ și $A(0; 5)$; d) $[OB$, unde $O(4; -5)$ și $B(3; -2)$.

16. Determinați funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ care are drept reprezentare grafică segmentul:

a) (AB), unde $A(-1; -4)$ și $B(2; 5)$;
b) $[AB)$, unde $A(-4; 6)$ și $B(-2; 2)$;
c) $[AB]$, unde $A(-3; -5)$ și $B(3; 3)$;
d) $(AB]$, unde $A(-4; 2)$ și $B(-2; 5)$.

17. Punctul $A(2; 5)$ aparține graficului funcției:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax - 1, x \in (-\infty; 1] \\ 3x + a, x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

a) Determinați numărul real a.
b) Reprezentați grafic funcția f.

18. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 7x + 7, x \in (-\infty; 0) \\ -x + 7, x \in [0; +\infty) \end{cases}$.

a) Reprezentați grafic funcția g în sistemul de axe ortogonale xOy.

b) Arătați că perimetrul triunghiului format de graficul funcției g cu axa absciselor depășește 24,8 u.

19. Se consideră funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} -2x - 2, x \in (-\infty; 1] \\ x - 5, x \in (1; +\infty) \end{cases}$.

a) Reprezentați grafic funcția h în sistemul de axe ortogonale xOy.

b) Calculați aria triunghiului format de graficul funcției h cu axa absciselor.

20. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 2$. Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy și apoi determinați măsurile unghiurilor triunghiului format de graficul funcției cu axa absciselor.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2ax - b, x \in (-\infty; 0) \\ 2ab - x, x \in [0; +\infty), \text{ unde } a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Știind că punctele $A(-3; 7)$ și $B(a^2; b^2)$ aparțin graficului funcției g, reprezentați grafic funcția în sistemul de axe ortogonale xOy.

22. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x - 7, x \in (-\infty; 1] \\ x + 5, x \in (1; +\infty) \end{cases}$. Determinați numărul natural n pentru care suma $f(1 - n) + f(n^2 + 2)$ este minimă.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Reprezentați grafic funcția $g : (-3; 2) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 3$ în sistemul de axe ortogonale xOy.

12. Un automobil a parcurs distanța dintre două localități, adaptând viteza la condițiile de trafic conform tabelului următor:

Viteza (km/h)	65	48	75	50	64
Timpul (min)	12	10	4	6	15

Calculați viteza medie (exprimată în kilometri/oră) cu care automobilul a parcurs distanța dintre cele două localități.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Precizați valoarea modală a seriei statistice:

Valorile caracteristicii	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Frecvența	8	13	11	9	14	15	12	7

(3p) **2.** Măsurându-se greutatea a șapte sportivi de la aceeași categorie, legitimați la un club de box, s-au obținut următoarele rezultate: 63,2 kg, 63,7 kg, 63,4 kg, 63,1 kg, 63,5 kg, 63,6 kg, 63,3 kg. Determinați greutatea medie a unui sportiv de la această categorie, cu ajutorul medianei.

(3p) **3.** La un test la matematică, elevii unei clase au obținut două note de 4, cinci note de 5, cinci note de 6, două note de 7, trei note de 8, șase note de 9, două note de 10. Scrieți datele problemei sub forma unei serii statistice și calculați media clasei la acest test.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Domeniul de definiție al funcției h definite prin tabelul

x	a	b	c
$h(x)$	r	v	t

este mulțimea:

A. $\{a, b, c\}$; B. $\{r, v\}$; C. $\{b, c\}$; D. $\{r, v, t\}$.

(1p) **2.** Se consideră funcția $f: \{-3, 4\} \to \{-4, 3\}$, $f(x) = -x$. Perechea care aparține mulțimii G_f este:

A. $(-3; -4)$; B. $(3; 3)$; C. $(4; 4)$; D. $(-3; 3)$.

(1p) **3.** Imaginea funcției $f : \{-1, 0, 3\} \to \mathbb{Z}, f(x) = x - 1$ este mulțimea:

A. $\{-1, 0\}$; B. $\{-2, -1, 2\}$; C. $\{-3, -2, 1\}$; D. $\{-1, 0\}$.

(1p) **4.** Se consideră funcția $g : \{0, -1\} \to \{-1, 0\}$. Formula care este lege de corespondență pentru funcția g este:

A. $2x - 1$; B. $x^3 - 1$; C. $x^2 - 1$; D. $2x + 1$.

(1p) **5.** Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{5}x - 10$ intersectează axa Ox în punctul:

A. $M(0;\ 2\sqrt{5})$; B. $M(0; -10)$; C. $M(-10; 0)$; D. $M(2\sqrt{5}; 0)$.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(1p) **1.** Reprezentați grafic funcția $f : (-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ în sistemul de axe ortogonale xOy.

(1p) **2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 4x - 13$. Dacă $G_f \cap G_g = \{M\}$, calculați distanța dintre punctele M și O, unde O este originea sistemului de axe ortogonale xOy.

(1p) **3.** Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - \sqrt{6}$. Determinați punctul $D(x; y)$ situat pe graficul funcției g cu proprietatea $x = y$.

(1p) **4.** Calculați distanța de la punctul $A(0; -6)$ la graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -1,(3)x + 4$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Se consideră următoarea serie statistică:

Valorile caracteristicii	x_1	x_2	x_3	x_4
Frecvența	11	13	17	19

Valoarea x_3 are frecvența egală cu:

A. 11; B. 13; C. 17; D. 19.

(1p) **2.** Se consideră funcția $f : \{0, 2\} \to A, f(x) = x - 1$. Valoarea funcției f în punctul 0 este egală cu:

A. -1; B. 2; C. 3; D. -2.

(1p) **3.** Punctul în care graficul funcției $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2\sqrt{7}x - 1$ intersectează axa Oy are coordonatele:

A. $(3; 0)$; B. $(0, -1)$; C. $(0, -2)$; D. $(2; 0)$.

(1p) **4.** Imaginea funcției $g : \{-1, 0, 3\} \to \mathbb{Z}, g(x) = x^2 - 3$ este mulțimea:

A. $\{-2; 5\}$; B. $\{-4, -2, 8\}$; C. $\{-3, -2, 6\}$; D. $\{-3, 8\}$.

(1p) **5.** Punctul $A(1; 7)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 2a$ dacă:

A. $a = 3$; B. $a = -2$; C. $a = -1$; D. $a = 4$.